作用マトリクスと対角化解法について

20080530　KETARU

長沼伸一郎氏の「物理数学の直感的方法」第２版で追加された１１章で「作用マトリクス」及び「対角化解法」と呼んでいる手法について述べられていますが、気づいた点を指摘しておきます。

1.　作用マトリクスと指数行列との関係

例として２行２列の作用マトリクスＡが下記のように対角化された場合

$$A=\begin{vmatrix}1+a\Delta & 0\\ 0 & 1-b\Delta\end{vmatrix}$$

時間ｔ秒後を表す変換行列は指数関数でつくられる対角行列になります。
（物理数学の直感的方法第２版 p218-219 参照）

$$\lim_{n\to\infty} A^n=\begin{vmatrix}e^{at} & 0\\ 0 & e^{-bt}\end{vmatrix} \qquad \text{但し}\ \Delta=\frac{t}{n}$$

これは実は行列 $X=\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & -b\end{vmatrix}$ の指数関数の値と等しくなっています。

$$\exp[t\,X]=\lim_{n\to\infty}\left(E+\frac{t}{n}X\right)^n=E+tX+\frac{t^2}{2!}X^2+\frac{t^3}{3!}X^3+\ldots=\begin{vmatrix}e^{at} & 0\\ 0 & e^{-bt}\end{vmatrix} \quad E\text{は単位行列}$$

比較すると、次の関係であることがわかります。

$$\exp[t\,X]=\lim_{n\to\infty}\left(E+\frac{t}{n}X\right)^n=\lim_{n\to\infty} A^n$$

右の２つの項を見れば、実は作用マトリクスというのは指数行列の定義式のｎ乗部分そのものを取りだして論じるものになっていたというわけです。このこと自体は特に間違ったことではありません。

よって、作用マトリクスＡと行列Ｘの指数関数の間の関係式は

$$A=(E+\Delta X),\quad \Delta=\frac{t}{n}$$

あるいは

$$X=\frac{(A-E)}{\Delta}$$

と表せるわけです。
ここから、作用マトリクス理論というものは上記の対応関係で、指数行列を使った微分方程式の解法やリー代数（リー群と指数行列で結びつく）などに結びつけられることがわかります。
ユニークな表記法だとは思いますが、厳しいことを言うと、指数行列に関する既存の数学の資産の範囲を超えるものではないと思われます。

2.　作用マトリクスは全て可解

さて、ここで問題と思われるのは「微分方程式の対角化解法」という主張です。

> ある問題が「解けるか否か」とは、要するにその作用マトリクスが対角化できるか否かの問題に還元できる>
>と考えられるのである。　p201

> 一般に微分方程式が、それに対応する作用マトリックスの対角化で解くことができねばならないという話に>
>なりはしないだろうか。　p216

対角化の判定で微分方程式が解けるか、解けないかがわかるとの主張ですが、ここが誤りです。これは既存の指数行列を使った解法と実は同等で、対角化可能か不可能かということには関係なく全て解くことができることが知られています。

ある作用マトリクス　$\boldsymbol{A}$　から得られる解は

$\boldsymbol{X}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}}{\Delta}$　の関係から　　（ $\boldsymbol{E}$ は単位行列)

一般にｒ個の固有値がある場合に、ｉ番目の固有値　λ_i　, 重複度　k_i　, 射影行列　$\boldsymbol{P_i}$　として

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}=\exp[t\,\boldsymbol{X}]=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{e}^{\lambda_i t}\left\{\boldsymbol{E}+\frac{t}{1!}(\boldsymbol{X}-\lambda_1\boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{X}-\lambda_2\boldsymbol{E})^2+\ldots+\frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!}(\boldsymbol{X}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{k_i-1}\right\}\boldsymbol{P_i}$$

の形になります。

3.　まとめ

○　作用マトリクスは単純な式で指数行列に置き換えることができて、既存の微分方程式の解法や Lie 代数との対応づけができる。

○　作用マトリクスが対角化可能ならば微分方程式は解ける「対角化解法」という主張は誤りであり、実際は上記の対応で全て解けることがわかる。

（なおこれはあくまで「対角化解法」についての否定意見であって、同書の他の主張である「スイッチ演算子」、「可算、非加算の判定」等について評価するものではありません。）

参考文献

古典型単純リー群　　横田一郎　　現代数学社
(行列の指数関数のｎ->∞乗の定義式が書いてあって、ひと安心しました。
自明すぎるのかあまり見たことがないです。)

新微分方程式対話　[新版]　　笠原 晧司　　日本評論社
（関西弁対話形式での解説。対角化不能行列の指数関数の導出などわかりやすかったです。）

線形代数と固有値問題　－スペクトル分解を中心に－　笠原 晧司　現代数学社